Ejercicios de curvatura de una función

1.- Estudia la curvatura de las siguientes funciones, hallando previamente los posibles puntos de inflexión.

a) $f(x) = -2x^2 + 8x$
Vamos a calcular los posibles puntos de inflexión. Para ello hallamos su segunda derivada e igualamos a cero.

$$f'(x) = -4x + 8 \longrightarrow f''(x) = -4$$

Como $f''(x)$ no se hace nunca cero, ya que es una función constante, la función $f(x)$ no tiene posibles puntos de inflexión. Como es una función continua, no cambia de curvatura en todo su dominio. Además como su segunda derivada siempre es negativa, esta función es cóncava hacia abajo en todo su dominio.

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$
Al igual que antes, hallemos su derivada segunda.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \longrightarrow f''(x) = 6x - 12$$

Si igualamos su derivada segunda a cero, tenemos $x = 2$. Esta función tiene un posible punto de inflexión en $(2, 0)$. Vemos el signo de la segunda derivada en los dos intervalos que determina el punto de inflexión.

- $]-\infty, 2[\longrightarrow f''(x) < 0$. En este tramo la función es cóncava hacia abajo.
- $]2, +\infty[\longrightarrow f''(x) > 0$. En este tramo la función es cóncava hacia arriba.

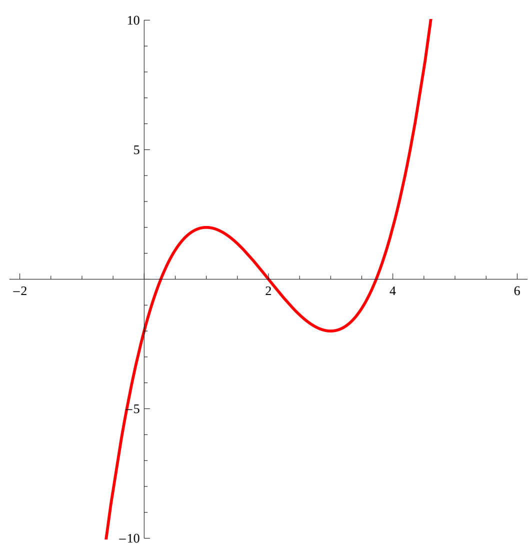

Figura 1: *Gráfica de la función* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

Como la función cambia de curvatura en el punto $(2, 0)$, este es un punto de inflexión de la misma.

c) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$
Calculamos la derivada segunda e igualamos a cero.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x \longrightarrow f''(x) = 12x^2 - 4 \longrightarrow 12x^2 - 4 = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, que son dos posibles puntos de inflexión. Vamos a ver qué signo tiene la derivada segunda en cada uno de los tres intervalos que determinan estos dos valores.

- $\left]-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[\longrightarrow f''(x) > 0$. En este tramo la función es cóncava hacia arriba.
- $\left]-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[\longrightarrow f''(x) < 0$. En este tramo la función es cóncava hacia abajo.
- $\left]\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[\longrightarrow f''(x) > 0$. En este tramo la función es cóncava hacia arriba.

Además en ambos puntos hay un cambio de curvatura. Son puntos de inflexión.

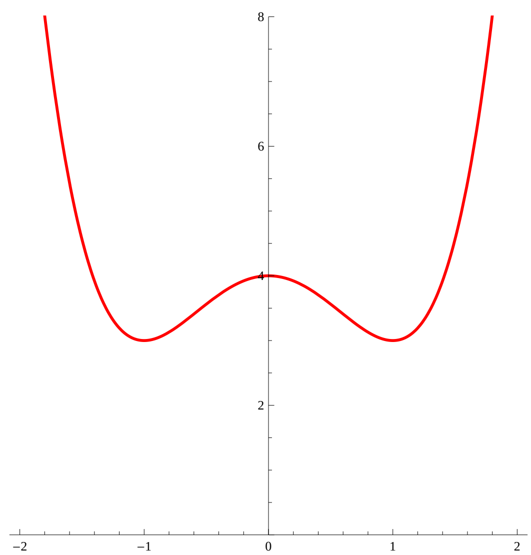

Figura 2: *Gráfica de la función* $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

d) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$
Al igual que antes, hallamos la segunda derivada e igualamos a cero.

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 \longrightarrow f''(x) = 60x^3 - 30x \longrightarrow 60x^3 - 30x = 0$$

Esta euación de grado tres tiene tres soluciones: $x = 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Tres posibles puntos de inflexión y por tanto tenemos cuatro intervalos donde estudiar el signo de la segundad derivada.

- $\left]-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[\longrightarrow f''(x) < 0$. En este tramo la función es cóncava hacia abajo.
- $\left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right[\longrightarrow f''(x) > 0$. En este tramo la función es cóncava hacia arriba.
- $\left]0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[\longrightarrow f''(x) < 0$. En este tramo la función es cóncava hacia abajo.
- $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[\longrightarrow f''(x) > 0$. En este tramo la función es cóncava hacia arriba.

En cada punto de los anteriores hay cambios en la curvatura. Los tres son puntos de inflexión.

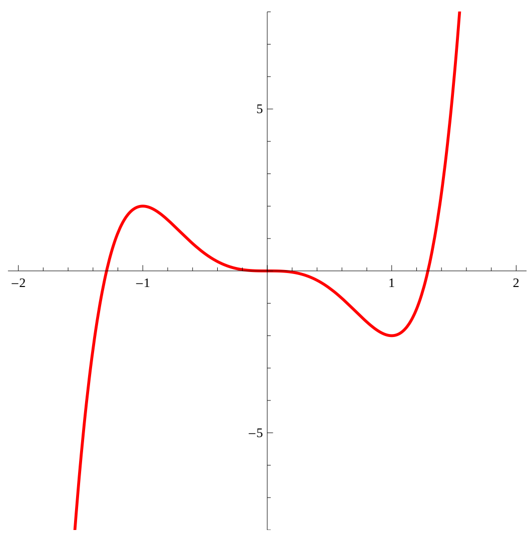

Figura 3: *Gráfica de la función* $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
Derivando:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \longrightarrow f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2 \cdot 2x \cdot (x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

Igualando la segunda derivada a cero nos queda.

$$\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} = 0 \longrightarrow 6x^2 - 2 = 0$$

Dos soluciones: $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Veamos los signos de la segunda derivada en los intervalos que resultan.

- $\left]-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[\longrightarrow f''(x) > 0$. En este tramo la función es cóncava hacia arriba.
- $\left]-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[\longrightarrow f''(x) < 0$. En este tramo la función es cóncava hacia abajo.
- $\left]\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[\longrightarrow f''(x) > 0$. En este tramo la función es cóncava hacia arriba.

Como la función cambia de curvatura en los dos puntos anteriores, ambos son puntos de inflexión.

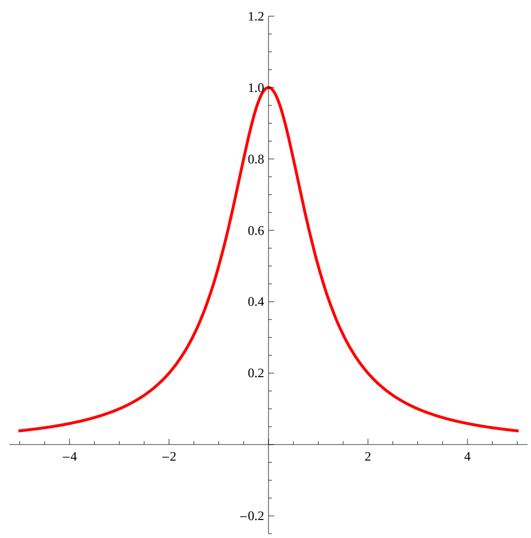

Figura 4: *Gráfica de la función* $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

f) $f(x) = e^{-x^2}$

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \longrightarrow f''(x) = \underbrace{-2e^{-x^2} - 2x \cdot (-2xe^{-x^2})}_{\text{derivada del producto}}$$

$$= -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$$

Igualando a cero.

$$-2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 0 \longrightarrow e^{-x^2}(-2+4x^2) = 0$$

Y como la exponencial nunca es cero, nos queda que

$$-2 + 4x^2 = 0$$

Dos soluciones: $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, que detrminan tres intervalos para estudiar el signo de la segunda derivada.

- $\left]-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[\longrightarrow f''(x) > 0$. En este tramo la función es cóncava hacia arriba.
- $\left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[\longrightarrow f''(x) < 0$. En este tramo la función es cóncava hacia abajo.
- $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[\longrightarrow f''(x) > 0$. En este tramo la función es cóncava hacia arriba.

En los dos puntos hay cambio de curvatura, por tanto, los dos son puntos de inflexión.

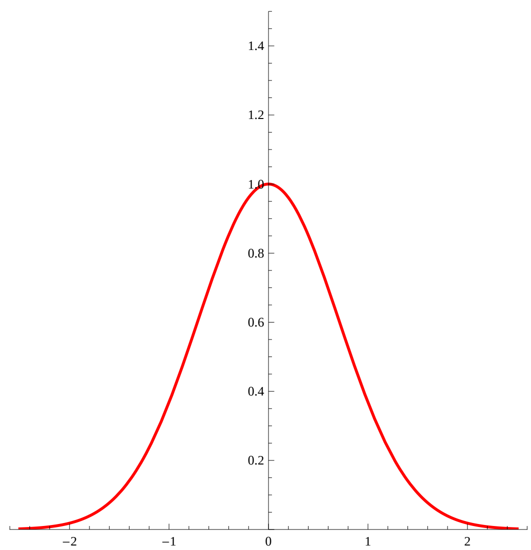

Figura 5: *Gráfica de la función* $f(x) = e^{-x^2}$

2.- Calcula la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en su punto de inflexión.
Primero calculamos el posible punto de inflexión. Igualamos la segunda derivada a cero.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \longrightarrow f''(x) = 6x - 6 \longrightarrow 6x - 6 = 0 \longrightarrow x = 1$$

El posible punto de inflexión es el punto $(1, -1)$. Podemos comprobar que la función cambia de curvatura en ese punto porque el signo de la derivada segunda cambia en ese punto.

Vamos a calcular la recta tangente a la gráfica de la función anterior en el punto $(1, -1)$. Su pendiente es la derivada en ese punto.

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$$

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente que nos piden es

$$y - (-1) = -3(x - 1)$$

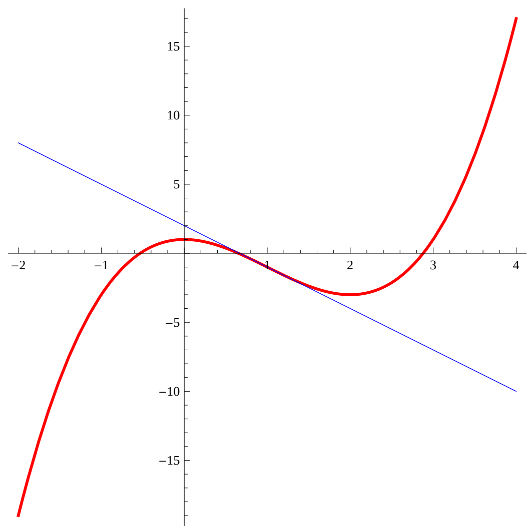

Figura 6: *Gráfica de la función* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ *y su recta tangente en el punto de inflexión.*

3.- Calcula la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ en su punto de inflexión de abscisa positiva.
Calculamos sus posibles puntos de inflexión.

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(x^2+1) - 4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3}$$

Igualamos a cero, para hallar los posibles puntos de inflexión.

$$\frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = 0 \longrightarrow 2x^3 - 6x = 0$$

Esta ecuación tiene tres soluciones: $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$. El valor con abscisa positiva es $x = \sqrt{3}$. El punto de inflexión (lo es porque hay un cambio de curvatura) es $\left(\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica en ese punto es $f'(\sqrt{3}) = -\dfrac{1}{8}$.

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto es

$$y - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{8}(x - \sqrt{3})$$

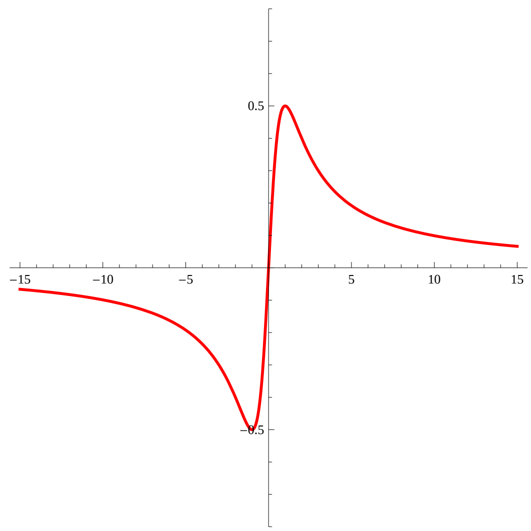

Figura 7: *Gráfica de la función* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.